**Исследование методов оптимизации на примере различных функций**

Автор: Юрий Кондратов

Для тестирования методов оптимизации было выбрано 22 функции:

1. Функции 1 - 10 являются многочленами малой размерности;
2. Функции 11 - 15 являются специальными функциями для тестирования методов оптимизации
3. Функции 16 – 22 являются функциями произвольной размерности, причем функции 17, 18, 20 не являются гладкими.

В результате расчетов можно заметить, что методы сходятся не только в минимумах функций, но и в стационарных точках; а также на проблемных функциях методы могут сходиться очень медленно, превышая предел допустимых итераций, либо расходится (ф. 14).

Кроме того, возможна работа на негладких функциях, но при этом выбор неподходящих точек начального приближения может легко привести к расхождению метода.

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -1.00001900 |
|  | -20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -1.00001900 |
| Количество итераций |  | 1 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -1.00001133 |
|  | 20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -0.99998467 |
| Количество итераций |  | 4 | 5 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -0.99998467 |
|  | -20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -1.00001133 |
| Количество итераций |  | 4 | 5 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -0.99995800 |
|  | 20 | -1.00000000 | -1.00000000 | -0.99995800 |
| Количество итераций |  | 1 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -1.00000000 | -1.00000000 | -0.99999800 |
|  | 0 | -1.00000000 | -1.00000000 | -0.99999800 |
| Количество итераций |  | 1 | 1000000 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.97872340 | -0.97872340 | -0.97873333 |
|  | -20 | -2.25531915 | -2.25531915 | -2.25535216 |
| Количество итераций |  | 8 | 3 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.97872340 | -0.97872340 | -0.97874014 |
|  | 20 | -2.25531915 | -2.25531915 | -2.25527045 |
| Количество итераций |  | 6 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.97872340 | -0.97872340 | -0.97870610 |
|  | -20 | -2.25531915 | -2.25531915 | -2.25535896 |
| Количество итераций |  | 4 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.97872340 | -0.97872340 | -0.97871291 |
|  | 20 | -2.25531915 | -2.25531915 | -2.25527726 |
| Количество итераций |  | 3 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -0.97872340 | -0.97872340 | -0.97872312 |
|  | 0 | -2.25531915 | -2.25531915 | -2.25531471 |
| Количество итераций |  | 2 | 1000000 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -9.50000000 | -9.50000000 | -9.50028800 |
|  | -20 | -5.00000000 | -5.00000000 | -5.00015600 |
| Количество итераций |  | 4 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -9.50000000 | -9.50000000 | -9.49996800 |
|  | 20 | -5.00000000 | -5.00000000 | -4.99996400 |
| Количество итераций |  | 6 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -9.50000000 | -9.50000000 | -9.49964800 |
|  | -20 | -5.00000000 | -5.00000000 | -4.99983600 |
| Количество итераций |  | 5 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -9.50000000 | -9.50000000 | -9.49932800 |
|  | 20 | -5.00000000 | -5.00000000 | -4.99964400 |
| Количество итераций |  | 5 | 6 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -9.50000000 | -9.50000000 | -9.49980800 |
|  | 0 | -5.00000000 | -5.00000000 | -4.99990000 |
| Количество итераций |  | 8 | 5 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -1997.43589730 | -1997.43589634 | -1989.01629184 |
|  | -20 | -1093.84615377 | -1093.84615325 | -1089.23556071 |
| Количество итераций |  | 5 | 73 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -1997.43589742 | -1997.43589727 | -1988.94441544 |
|  | 20 | -1093.84615384 | -1093.84615375 | -1089.19617638 |
| Количество итераций |  | 3 | 6 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -1997.43589836 | -1997.43589825 | -1988.88501073 |
|  | -20 | -1093.84615435 | -1093.84615429 | -1089.16368430 |
| Количество итераций |  | 5 | 52 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -1997.43589754 | -1997.43589874 | -1988.81313434 |
|  | 20 | -1093.84615391 | -1093.84615456 | -1089.12429998 |
| Количество итераций |  | 4 | 36 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -1997.43589641 | -1997.43589645 | -1988.91478510 |
|  | 0 | -1093.84615328 | -1093.84615330 | -1089.17996978 |
| Количество итераций |  | 7 | 9 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25001975 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25001975 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25001975 |
| Количество итераций |  | 10 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25002667 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25002667 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24994667 |
| Количество итераций |  | 14 | 5 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25002667 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24994667 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25002667 |
| Количество итераций |  | 15 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25005333 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
| Количество итераций |  | 10 | 6 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24994667 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25002667 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25002667 |
| Количество итераций |  | 11 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 6:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25005333 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
| Количество итераций |  | 11 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 7:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
|  | -20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.25005333 |
| Количество итераций |  | 8 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 8:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
|  | 20 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24997333 |
| Количество итераций |  | 9 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 9:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24999975 |
|  | 0 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24999975 |
|  | 0 | -0.25000000 | -0.25000000 | -0.24999975 |
| Количество итераций |  | 2 | 3 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | 0.58210887 | 0.58210887 | -0.59376195 |
|  | -20 | -0.52599474 | -0.52599474 | 0.51580258 |
| Количество итераций |  | 74 | 16 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -0.58210887 | -0.58210887 | -0.60382767 |
|  | 20 | 0.52599475 | 0.52599474 | 0.54467784 |
| Количество итераций |  | 34 | 14 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 0.58210887 | 0.58210887 | 0.60382767 |
|  | -20 | -0.52599475 | -0.52599474 | -0.54467784 |
| Количество итераций |  | 34 | 14 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | -0.58210887 | -0.58210887 | 0.59376195 |
|  | 20 | 0.52599474 | 0.52599474 | -0.51580258 |
| Количество итераций |  | 74 | 16 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | -0.58210887 | 0.00000000 | 0.58210853 |
|  | 0.5 | 0.52599474 | -0.00000000 | -0.52599398 |
| Количество итераций |  | 14 | 7 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -1.08788977 | -1.75807511 |
|  | -20 | -20.00000000 | -1.00317844 | -1.62238646 |
| Количество итераций |  | 1 | 21 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | 0.00000000 | -1.46746248 |
|  | 20 | 20.00000000 | -0.00000000 | 1.35506449 |
| Количество итераций |  | 1 | 88 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | -0.00000000 | 1.46746248 |
|  | -20 | -20.00000000 | 0.00000000 | -1.35506449 |
| Количество итераций |  | 1 | 88 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 1.08788977 | 1.75807511 |
|  | 20 | 20.00000000 | 1.00317844 | 1.62238646 |
| Количество итераций |  | 1 | 21 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | -1.08788977 | 0.00000000 | 1.08788891 |
|  | 0.5 | -1.00317844 | 0.00000000 | 1.00317770 |
| Количество итераций |  | 22 | 72 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.99999998 | -1.63907231 |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.99999998 | -1.63907231 |
| Количество итераций |  | 1 | 20 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.00000000 | -1.27986310 |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.00000000 | 1.27986310 |
| Количество итераций |  | 1 | 20 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.00000000 | 1.27986310 |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.00000000 | -1.27986310 |
| Количество итераций |  | 1 | 20 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.99999998 | 1.63907231 |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.99999998 | 1.63907231 |
| Количество итераций |  | 1 | 20 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | -0.00000000 | 0.57735028 | 0.00000025 |
|  | 0.5 | 0.00000000 | 0.57735028 | 0.00000025 |
| Количество итераций |  | 6 | 4 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Локальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -1.34777466 | -1.75601801 |
|  | -20 | -20.00000000 | -1.34777466 | -1.75601801 |
| Количество итераций |  | 1 | 22 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.00000000 | -1.21694232 |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.00000000 | 1.21694232 |
| Количество итераций |  | 1 | 20 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.00000000 | 1.21694232 |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.00000000 | -1.21694232 |
| Количество итераций |  | 1 | 20 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 1.34777466 | 1.75601801 |
|  | 20 | 20.00000000 | 1.34777466 | 1.75601801 |
| Количество итераций |  | 1 | 22 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | 1.01165100 | 0.42837299 | 1.34777314 |
|  | 0.5 | 1.01155480 | 0.42837299 | 1.34777314 |
| Количество итераций |  | 1000000 | 5 | 1000000 |

1. Гладкая функция

Глобальный минимум:

Локальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.99999999 | -1.57371479 |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.99999999 | -1.57371479 |
| Количество итераций |  | 1 | 19 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.39331988 | -1.25546568 |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.39331988 | 1.25546568 |
| Количество итераций |  | 1 | 21 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.39331988 | 1.25546568 |
|  | -20 | -20.00000000 | -0.39331988 | -1.25546568 |
| Количество итераций |  | 1 | 21 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.99999999 | 1.57371479 |
|  | 20 | 20.00000000 | 0.99999999 | 1.57371479 |
| Количество итераций |  | 1 | 19 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | 0.99999999 | 0.00000000 | -0.99999699 |
|  | 0.5 | 0.99999999 | 0.00000000 | -0.99999699 |
| Количество итераций |  | 268811 | 5 | 1000000 |

1. Гладкая функция (функция Химмельбау)

Глобальный минимум:

Локальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -0.13728848 | -0.27084459 | 3.58442741 |
|  | 0 | 1.22767072 | -0.92303856 | -1.84812413 |
| Количество итераций |  | 7968 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 4 | 3.00000000 | 3.00000000 | 2.99999964 |
|  | 4 | 2.00000000 | 2.00000000 | 2.00000774 |
| Количество итераций |  | 14 | 7 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -4 | -2.80511809 | -2.80511809 | -2.80512047 |
|  | 4 | 3.13131252 | 3.13131252 | 3.13131394 |
| Количество итераций |  | 15 | 6 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -4 | -3.77931025 | -3.77931025 | -3.77931079 |
|  | -4 | -3.28318599 | -3.28318599 | -3.28318720 |
| Количество итераций |  | 10 | 5 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 4 | 3.58442834 | 3.58442834 | 3.58442949 |
|  | -4 | -1.84812652 | -1.84812652 | -1.84813619 |
| Количество итераций |  | 23 | 7 | 1000000 |

1. Гладкая функция

, где

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.1 | -1.90599244 | -0.60582958 | 1.29726609 |
|  | 0.1 | 1.70441423 | -0.60582958 | 1.70431725 |
|  | 0.1 | 2.24497368 | -0.60582958 | 2.24494128 |
|  | 0.1 | 3.15747544 | -0.60582958 | 3.15746791 |
| Количество итераций |  | 33 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 3.9 | 3.90000000 | 1.29752594 | 1.29808951 |
|  | 3.9 | 3.90000000 | 1.70441423 | 1.70454689 |
|  | 3.9 | 3.90000000 | 2.24497368 | 2.24499868 |
|  | 3.9 | 3.90000000 | 3.15747544 | 3.15747727 |
| Количество итераций |  | 1 | 12 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 2 | 2.00000000 | 1.29752594 | 1.29756402 |
|  | 2 | 2.00000000 | 1.70441423 | 1.70441869 |
|  | 2 | 2.00000000 | 2.24497368 | 2.24497276 |
|  | 2 | 2.00000000 | -0.60582958 | 3.15747473 |
| Количество итераций |  | 1 | 8 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 3 | 3.00000000 | 1.29752594 | 1.29761822 |
|  | 1 | 1.00000000 | -0.60582958 | 1.70440358 |
|  | 1 | 1.00000000 | -0.60582958 | 2.24496898 |
|  | 2 | 2.00000000 | -0.60582958 | 3.15747473 |
| Количество итераций |  | 1 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 2 | 2.00000000 | 1.29752594 | 1.29756402 |
|  | 3 | 3.00000000 | 1.70441423 | 1.70443380 |
|  | 3 | 3.00000000 | 2.24497368 | 2.24497653 |
|  | 2 | 2.00000000 | -0.60582958 | 3.15747473 |
| Количество итераций |  | 1 | 9 | 1000000 |

1. Гладкая функция (функция Бранина)

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 5 | 3.14159265 | 21.99114852 | 3.14151124 |
|  | 5 | 9.01106125 | 363.54200010 | 9.01064729 |
| Количество итераций |  | 18 | 10 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 7 | 3.14159265 | 6.28318532 | 3.14169033 |
|  | 10 | 9.01106126 | 28.04424519 | 9.01146728 |
| Количество итераций |  | 59 | 8 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 7 | 6.32017708 | 6.28318532 | 3.14136298 |
|  | 3 | 28.35798983 | 28.04424519 | 9.00987081 |
| Количество итераций |  | 1000000 | 7 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -3 | -3.14159264 | -3.14159264 | -3.14118984 |
|  | 10 | 19.01106119 | 19.01106119 | 19.00807762 |
| Количество итераций |  | 14 | 5 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -3 | -3.14159264 | -3.14159264 | 3.14141116 |
|  | 3 | 19.01106119 | 19.01106119 | 9.01023218 |
| Количество итераций |  | 24 | 5 | 1000000 |

1. Гладкая функция (функция МакКормика)

Глобальный минимум:

Локальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | -0.54719755 | inf | -0.54719634 |
|  | 0 | -1.54719755 | inf | -1.54719634 |
| Количество итераций |  | 11 | 15 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 2 | 2.59439510 | 2.59439510 | 2.59439499 |
|  | 2 | 1.59439510 | 1.59439510 | 1.59439499 |
| Количество итераций |  | 6 | 1000000 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -0.5 | -3.68879021 | 1.54719755 | -0.54719548 |
|  | 2 | -4.68879021 | 0.54719755 | -1.54719548 |
| Количество итераций |  | 11 | 11 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 2 | -0.54719755 | 1.54719755 | -0.54719577 |
|  | -1 | -1.54719755 | 0.54719755 | -1.54719577 |
| Количество итераций |  | 9 | 9 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -0.5 | -0.54719755 | -0.54719755 | -0.54719721 |
|  | -1 | -1.54719755 | -1.54719755 | -1.54719721 |
| Количество итераций |  | 13 | 1000000 | 1000000 |

1. Гладкая функция (функция Матиаса)

Глобальный минимум:

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.00000000 | 0.00000000 | 0.00000000 |
|  | 0 | 0.00000000 | 0.00000000 | 0.00000000 |
| Количество итераций |  | 1 | 1 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 5 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00006250 |
|  | 5 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00006250 |
| Количество итераций |  | 3 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 5 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00000500 |
|  | -5 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00000500 |
| Количество итераций |  | 2 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -5 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00000500 |
|  | 5 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00000500 |
| Количество итераций |  | 2 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -5 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00006250 |
|  | -5 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00006250 |
| Количество итераций |  | 3 | 2 | 1000000 |

1. Гладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 1)

Глобальный минимум:

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999968 | 0.99999968 | 0.99935908 |
|  | 1 | 0.99999872 | 0.99999872 | 0.99743607 |
| Количество итераций |  | 197 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999968 | 0.99999968 | 0.99363323 |
|  | -1 | 0.99999872 | 0.99999872 | 0.97429403 |
| Количество итераций |  | 26 | 7 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.99999968 | 0.99999968 | 0.99840547 |
|  | 0 | 0.99999872 | 0.99999872 | 0.99354612 |
| Количество итераций |  | 20 | 7 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | 0.99999968 | 0.99999968 | 0.52729166 |
|  | -10 | 0.99999872 | 0.99999872 | -0.54516907 |
| Количество итераций |  | 58 | 6 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.99999968 | 0.99999968 | 0.99714135 |
|  | -1 | 0.99999872 | 0.99999872 | 0.98842151 |
| Количество итераций |  | 15 | 4 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | -0.13193911 | 0.99999328 | 0.99366042 |
|  | 1 | -0.81553556 | 0.99997272 | 0.97440393 |
|  | 1 | 0.31321058 | 0.99989081 | 0.89884490 |
|  | 1 | -0.77834918 | 0.99956328 | 0.61582360 |
| Количество итераций |  | 54 | 31 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999330 | 0.99999328 | 0.96512238 |
|  | -1 | 0.99997277 | 0.99997272 | 0.86074593 |
|  | -1 | 0.99989095 | 0.99989081 | 0.48122437 |
|  | -1 | 0.99956382 | 0.99956328 | -0.53698702 |
| Количество итераций |  | 153 | 37 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.08798021 | 0.99999328 | 0.98107041 |
|  | 0 | -0.02411397 | 0.99997272 | 0.92383088 |
|  | 0 | -0.61272673 | 0.99989081 | 0.70665063 |
|  | 0 | -0.27215280 | 0.99956328 | -0.00134272 |
| Количество итераций |  | 7 | 40 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | 0.99999335 | -inf | 0.92241503 |
|  | 10 | 0.99997298 | inf | 0.67122224 |
|  | -10 | 0.99989181 | inf | -0.14590011 |
|  | -10 | 0.99956726 | inf | -1.04996743 |
| Количество итераций |  | 210 | 99 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.95793615 | 0.99999328 | 0.96977455 |
|  | -1 | 0.83252760 | 0.99997272 | 0.87901791 |
|  | 0 | 0.38477751 | 0.99989081 | 0.54489027 |
|  | -1 | -0.70533796 | 0.99956328 | -0.40634500 |
| Количество итераций |  | 80 | 31 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:
4. Негладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 2)

Глобальный минимум:

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | -1.00000000 | -368934881473.34891558 | -1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | 575618142643318694969344 | 1.00000000 |
| Количество итераций |  | 1 | 100000 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.33270737 | inf | -0.34627009 |
|  | -1 | -0.77743192 | inf | -0.79659167 |
| Количество итераций |  | 12 | 1 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.68721316 | nan | 0.64138802 |
|  | 0 | -0.05536490 | -inf | -0.17724864 |
| Количество итераций |  | 26 | 1 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | 0.80674713 | inf | 0.39021230 |
|  | -10 | 0.30167478 | inf | -0.69549167 |
| Количество итераций |  | 43 | 1 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.65630162 | nan | 0.15750532 |
|  | -1 | -0.13853643 | -inf | -0.95039720 |
| Количество итераций |  | 27 | 3 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | -1.00000000 | -2861170205025935133696 | -1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | -2267927944885866933504 | 1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | 2861170205025842918144 | 1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | 42277124864175619500 | 1.00000000 |
| Количество итераций |  | 1 | 6 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.69474516 | inf | -0.39805918 |
|  | -1 | 0.15224709 | -inf | -0.68305028 |
|  | -1 | 0.14355102 | -inf | -0.06693526 |
|  | -1 | -1.13044716 | nan | -0.99103486 |
| Количество итераций |  | 3 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.49515754 | inf | 0.53413077 |
|  | 0 | -0.50975294 | nan | -0.42941627 |
|  | 0 | -0.48060550 | nan | -0.63118461 |
|  | 0 | -0.53808392 | -inf | -0.20321093 |
| Количество итераций |  | 18 | 1 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.55074231 | -inf | 0.91572880 |
|  | 10 | 0.40005088 | -inf | 0.67710098 |
|  | -10 | -0.30035287 | -inf | -0.08336936 |
|  | -10 | -7.36977866 | -inf | -6.08963493 |
| Количество итераций |  | 8 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.36969437 | -inf | 0.35818810 |
|  | -1 | -0.69333277 | -inf | -0.74341745 |
|  | 0 | -0.03130312 | inf | 0.10534071 |
|  | -1 | -0.75608539 | -inf | -0.97780546 |
| Количество итераций |  | 4 | 26 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:
4. Негладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 3)

Глобальный минимум:

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999800 | 0.99999800 | 0.99487848 |
|  | 1 | 0.99999600 | 0.99999600 | 0.98978319 |
| Количество итераций |  | 1545 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999801 | 0.99999800 | 0.96992078 |
|  | -1 | 0.99999601 | 0.99999600 | 0.94064403 |
| Количество итераций |  | 44 | 6 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 1.00557180 | 0.99999800 | 0.85484660 |
|  | 0 | 1.01626897 | 0.99999600 | 0.76265214 |
| Количество итераций |  | 352 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | 0.99999942 | 0.99999800 | 0.52597266 |
|  | -10 | 0.99999877 | 0.99999600 | 0.24279483 |
| Количество итераций |  | 96 | 6 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.99999857 | 0.99999800 | 0.98738396 |
|  | -1 | 0.99999711 | 0.99999600 | 0.97487612 |
| Количество итераций |  | 47 | 6 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999806 | 0.99999800 | 0.99487848 |
|  | 1 | 0.99999612 | 0.99999600 | 0.98978319 |
|  | 1 | 0.99999796 | 0.99999800 | 0.99999803 |
|  | 1 | 0.99999594 | 0.99999600 | 0.99999605 |
| Количество итераций |  | 1242 | 4 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999833 | 0.99999800 | 0.96992078 |
|  | -1 | 0.99999663 | 0.99999600 | 0.94064403 |
|  | -1 | 0.99999890 | 0.99999800 | 0.96992078 |
|  | -1 | 0.99999789 | 0.99999600 | 0.94064403 |
| Количество итераций |  | 71 | 6 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.28074788 | 0.99999800 | 0.89334625 |
|  | 0 | 0.08323957 | 0.99999600 | 0.76615091 |
|  | 0 | 0.12006061 | 0.99999800 | 0.85484660 |
|  | 0 | 0.02595974 | 0.99999600 | 0.76265214 |
| Количество итераций |  | 158 | 4 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.16154819 | 0.99999800 | 3.24045049 |
|  | 10 | 0.00943208 | 0.99999600 | 10.50051962 |
|  | -10 | 0.81202328 | 0.99999800 | -0.29548899 |
|  | -10 | 0.66251717 | 0.99999600 | 0.05456292 |
| Количество итераций |  | 136 | 9 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.75946937 | 0.99999800 | 0.98738396 |
|  | -1 | 0.57187343 | 0.99999600 | 0.97487612 |
|  | 0 | 1.02387819 | 0.99999800 | 0.98738396 |
|  | -1 | 1.05352404 | 0.99999600 | 0.97487612 |
| Количество итераций |  | 936 | 6 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:
4. Гладкая функция (функция Розенброка)

Глобальный минимум:

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999800 | 0.99999800 | 0.99487848 |
|  | 1 | 0.99999600 | 0.99999600 | 0.98978319 |
| Количество итераций |  | 1545 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999801 | 0.99999800 | 0.96992078 |
|  | -1 | 0.99999601 | 0.99999600 | 0.94064403 |
| Количество итераций |  | 44 | 6 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 1.00557180 | 0.99999800 | 0.85484660 |
|  | 0 | 1.01626897 | 0.99999600 | 0.76265214 |
| Количество итераций |  | 352 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | 0.99999942 | 0.99999800 | 0.52597266 |
|  | -10 | 0.99999877 | 0.99999600 | 0.24279483 |
| Количество итераций |  | 96 | 6 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.99999857 | 0.99999800 | 0.98738396 |
|  | -1 | 0.99999711 | 0.99999600 | 0.97487612 |
| Количество итераций |  | 47 | 6 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999806 | 0.99999800 | 0.99487848 |
|  | 1 | 0.99999612 | 0.99999600 | 0.98978319 |
|  | 1 | 0.99999796 | 0.99999800 | 0.99999803 |
|  | 1 | 0.99999594 | 0.99999600 | 0.99999605 |
| Количество итераций |  | 1242 | 4 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.99999833 | 0.99999800 | 0.96992078 |
|  | -1 | 0.99999663 | 0.99999600 | 0.94064403 |
|  | -1 | 0.99999890 | 0.99999800 | 0.96992078 |
|  | -1 | 0.99999789 | 0.99999600 | 0.94064403 |
| Количество итераций |  | 71 | 6 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.28074788 | 0.99999800 | 0.89334625 |
|  | 0 | 0.08323957 | 0.99999600 | 0.76615091 |
|  | 0 | 0.12006061 | 0.99999800 | 0.85484660 |
|  | 0 | 0.02595974 | 0.99999600 | 0.76265214 |
| Количество итераций |  | 158 | 4 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.16154819 | 0.99999800 | 3.24045049 |
|  | 10 | 0.00943208 | 0.99999600 | 10.50051962 |
|  | -10 | 0.81202328 | 0.99999800 | -0.29548899 |
|  | -10 | 0.66251717 | 0.99999600 | 0.05456292 |
| Количество итераций |  | 136 | 9 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.75946937 | 0.99999800 | 0.98738396 |
|  | -1 | 0.57187343 | 0.99999600 | 0.97487612 |
|  | 0 | 1.02387819 | 0.99999800 | 0.98738396 |
|  | -1 | 1.05352404 | 0.99999600 | 0.97487612 |
| Количество итераций |  | 936 | 6 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:
4. Негладкая функция (функция Розенборка 2)

Глобальный минимум:

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | -1.00000000 | inf | -1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | nan | 1.00000000 |
| Количество итераций |  | 1 | 4 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 1.00303282 | Inf | 0.01747504 |
|  | -1 | 1.00614391 | -inf | 0.00029917 |
| Количество итераций |  | 50 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.36669666 | Inf | 0.01976851 |
|  | 0 | 0.13449964 | inf | 0.00039049 |
| Количество итераций |  | 14 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | 0.02919115 | Nan | 0.77680272 |
|  | -10 | 0.01792452 | -inf | -2.31795579 |
| Количество итераций |  | 3 | 1 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.76161176 | nan | 0.13017862 |
|  | -1 | 0.58001434 | -Inf | 0.01693957 |
| Количество итераций |  | 34 | 2 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | -1.00000000 | inf | -1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | inf | 1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | -inf | 1.00000000 |
|  | 1 | 1.00000000 | inf | 1.00000000 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -1 | 0.57361021 | -inf | 0.01747504 |
|  | -1 | 0.32852898 | nan | 0.00029917 |
|  | -1 | 0.62589899 | inf | 0.01747504 |
|  | -1 | 0.39185250 | nan | 0.00029917 |
| Количество итераций |  | 40 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.32415702 | -inf | 0.02032840 |
|  | 0 | 0.10508732 | nan | 0.00041293 |
|  | 0 | 0.45456754 | -inf | 0.02032840 |
|  | 0 | 0.20671495 | nan | 0.00041293 |
| Количество итераций |  | 33 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.29292167 | inf | 3.27514196 |
|  | 10 | 0.15439793 | inf | 10.72663520 |
|  | -10 | 0.72922976 | -inf | -1.05933281 |
|  | -10 | 0.42221828 | inf | -7.73425824 |
| Количество итераций |  | 6 | 35 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0 | 0.67204259 | inf | 0.13017862 |
|  | -1 | 0.45207898 | inf | 0.01693957 |
|  | 0 | 0.60931676 | -inf | 0.13017862 |
|  | -1 | 0.37130046 | inf | 0.01693957 |
| Количество итераций |  | 43 | 20 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:
4. Гладкая функция (функция Растригина)

Глобальный минимум: , на , множество локальных минимумов.

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 5 | 10.00000000 | 4.99746686 | 5.16364140 |
|  | 5 | 10.00000000 | 4.99746686 | 5.16364140 |
| Количество итераций |  | 7 | 3 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 1 | 10.00000000 | 0.99746686 | -2.28670061 |
|  | 1 | 10.00000000 | 0.99746686 | -2.28670061 |
| Количество итераций |  | 9 | 3 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 2 | 10.00000000 | 1.99746686 | 2.21446002 |
|  | 2 | 10.00000000 | 1.99746686 | 2.21446002 |
| Количество итераций |  | 8 | 3 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -3 | 10.00000000 | -3.00253314 | -3.68984863 |
|  | -3 | 10.00000000 | -3.00253314 | -3.68984863 |
| Количество итераций |  | 9 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | -0.25404367 | 0.50253314 | 6.87048310 |
|  | 0.5 | -0.25404367 | 0.50253314 | 6.87048310 |
| Количество итераций |  | 11 | 3 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 5 | 10.00000000 | 4.99746686 | 5.16364140 |
|  | 5 | 10.00000000 | 4.99746686 | 5.16364140 |
|  | 5 | 10.00000000 | 4.99746686 | 5.16364140 |
|  | 5 | 10.00000000 | 4.99746686 | 5.16364140 |
| Количество итераций |  | 9 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 1 | 10.00000000 | 0.99746686 | -2.28670061 |
|  | 1 | 10.00000000 | 0.99746686 | -2.28670061 |
|  | 1 | 10.00000000 | 0.99746686 | -2.28670061 |
|  | 1 | 10.00000000 | 0.99746686 | -2.28670061 |
| Количество итераций |  | 12 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 2 | 10.00000000 | 1.99746686 | 2.21446002 |
|  | 2 | 10.00000000 | 1.99746686 | 2.21446002 |
|  | 2 | 10.00000000 | 1.99746686 | 2.21446002 |
|  | 2 | 10.00000000 | 1.99746686 | 2.21446002 |
| Количество итераций |  | 9 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -3 | 10.00000000 | -3.00253314 | -3.68984863 |
|  | -3 | 10.00000000 | -3.00253314 | -3.68984863 |
|  | -3 | 10.00000000 | -3.00253314 | -3.68984863 |
|  | -3 | 10.00000000 | -3.00253314 | -3.68984863 |
| Количество итераций |  | 8 | 3 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 0.5 | -0.25404367 | 0.50253314 | 6.87048310 |
|  | 0.5 | -0.25404367 | 0.50253314 | 6.87048310 |
|  | 0.5 | -0.25404367 | 0.50253314 | 6.87048310 |
|  | 0.5 | -0.25404367 | 0.50253314 | 6.87048310 |
| Количество итераций |  | 839 | 3 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:
4. Гладкая функция (сферическая)

Глобальный минимум:

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00009999 |
|  | 10 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00009999 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 1000000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 1 | 0.00000000 | -0.00000000 | 0.00001000 |
|  | -2 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00002000 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 1000 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00999934 |
|  | 1000 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00999934 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00009999 |
|  | 10 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00009999 |
|  | 10 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00009999 |
|  | 10 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00009999 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 2:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | -10 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 10 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00009999 |
|  | 10 | -0.00000000 | -0.00000000 | 0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
|  | -10 | 0.00000000 | -0.00000000 | -0.00009999 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 1 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00001000 |
|  | 2 | 0.00000000 | -0.00000000 | 0.00002000 |
|  | -3 | -0.00000000 | 0.00000000 | -0.00003000 |
|  | -4 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00004000 |
| Количество итераций |  | 2 | 2 | 100000 |

Начальное приближение 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Начальное прибл. | Полученное приближенное значение | | |
| BFGS | Hessian Free | Метод Нестерова |
|  | 1000 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00999934 |
|  | 0 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00000000 |
|  | 0 | 0.00000000 | 0.00000000 | -0.00000000 |
|  | 1000 | -0.00000000 | 0.00000000 | 0.00999934 |
| Количество итераций |  | 1 | 2 | 100000 |

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

**Размерность**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:
2. Hessian Free:
3. Метод Нестерова:

Источники:

1. <http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2011/02/2923.pdf>
2. <https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization>
3. <http://www.geatbx.com/docu/fcnindex-01.html>
4. http://infinity77.net/global\_optimization/test\_functions.html